Applications de la dérivation

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1 Etude du sens de variation des fonctions

Théorème 1.1 Théorème

(Activité 1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- si la fonction f est croissante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x)$ est positif (ou nul en quelques points isolés).
- si la fonction f est strictement décroissante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x)$ est strictement négatif (ou nul en quelques points isolés).
- si la fonction f est constante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) = 0$.

Remarque La preuve découle du fait que $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x .

Dans le cas où f est croissante sur I , on constate graphiquement que la tangente est "montante" donc $m \geq 0$ soit $f'(x) \geq 0$.

Exercice 1 Soit f une fonction dont son tableau de variation est le suivant. Donner le signe de $f'(x)$.

x	-2	1	7	14	30
$f(x)$	8	-2	-1	-7	-15

Diagramme de variation : des flèches indiquent une décroissance de 8 à -2, une augmentation de -2 à -1, et une décroissance de -1 à -7, et enfin une décroissance de -7 à -15.

Théorème 1.2 Théorème réciproque admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- si pour tout x de I , $f'(x)$ est strictement positif (ou nul en quelques points isolés), alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- si pour tout x de I , $f'(x)$ est strictement négatif (ou nul en quelques points isolés), alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- si pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I .

Exercice 2 Etudier le sens de variation de la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

Réponse :

$f'(x) = 2x - 3$. Le signe de $f'(x)$ est donc :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$		- 0 +	

donc f est décroissante sur $] -\infty; \frac{3}{2}]$ et croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$

Le tableau de variation de f est donc :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$-\frac{1}{4}$	

Diagramme de variation : une flèche descendante de gauche à droite pointe vers $-\frac{1}{4}$ au-dessous de $\frac{3}{2}$, et une flèche ascendante de gauche à droite pointe vers la droite à partir de $\frac{3}{2}$.

Exercice 3 Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x + 3)$$

2 Extrema d'une fonction

2.1 Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum local (resp un minimum local) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I contenant x_0 et tel que :

pour tout $x \in J$ $f(x) \leq f(x_0)$ (resp $f(x) \geq f(x_0)$).

On dit que $f(x_0)$ est un extremum local.

Remarque On parle de maximum global (resp un minimum global) si pour tout $x \in I$ $f(x) \leq f(x_0)$ (resp $f(x) \geq f(x_0)$).

2.2 Théorème

Théorème 2.1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I =]a; b[$ et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum locale en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$

Contre-exemple classique : $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$: la dérivée s'annule pour $x = 0$ mais ne change pas de signe ($f'(x) \geq 0$).

Or il n'y a pas d'extremums pour la fonction cube.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Théorème 2.2 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I =]a; b[$ et $x_0 \in I$. Si f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum locale en x_0 .

Remarque La tangente à C au point d'abscisse x_0 est horizontale.

Schéma :

x	x_0	
signe de $f'(x)$	$-$	$+$
variation de f		

Exercice 4 Déterminer les extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Exercice 5 Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sur son ensemble de dérivabilité. Préciser les extremums locaux et globaux.

- $f(x) = x^2 - 4x + 6$
- $g(x) = x^3 - 3x + 2$
- $F(x) = \frac{5-x}{2+x}$

3 Optimisation

Contexte : Aire minimal/Volume maximal/Bénéfice maximal/Coût moyen minimal...

Exercice 6 Voir Activité 2

Dans une plaque de carton carrée de 1,2 mètres de côté, on découpe des carrés aux quatre coins afin de construire une boîte sans couvercle.

Comment faire pour obtenir une boîte de volume maximal ?

Eléments de correction :

Soit x la longueur du côté du carré. On a : $V(x) = 4x^3 - 4,8x^2 + 1,44x$.

$V'(x) = 12x^2 - 9,6x + 1,44$. D'après le tableau de variation de V sur $[0; 0,6]$, le volume de la boîte est maximale pour $x = 0,2$. Le volume maximal est alors : $V(0,2) = 0,128 m^3$.

4 Inégalités/Encadrement

Exercice 7 On veut démontrer que pour tout réel $x > \frac{2}{3}$,

$$\frac{x^3}{3x-2} \geq 1$$

Exercice 8 On veut démontrer que si $0 \leq x \leq 2$, alors

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1} \leq 0$$

5 Comparaison de fonctions

Exercice 9 On veut démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x^4}{4} \geq x - \frac{3}{4}$$

Pour cela, on pose $g(x) = \frac{x^4}{4} - (x - \frac{3}{4})$.

Etudier les variations de la fonction g et en déduire l'inégalité.

6 Solutions

Solution de l'exercice 5 :

1) $f'(x) = 2x - 4$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 2 $\nearrow$	$+\infty$

2) $g'(x) = 3x^2 - 3$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $F'(x) = \frac{-7}{(2+x)^2}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$		
$F'(x)$		-		-	
$F(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	-1